Durée : 5 heures
Toutes séries réunies

**SESSION 2006** **CLASSES DE PREMIÈREs**

# M A T H E M A T I Q U E S

**Le sujet comporte deux problèmes obligatoires. Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la présentation, de la clarté, de la rigueur et de la concision des démonstrations.**

## EXERCICE 1 (4,5 points)

P est un polynôme non nul, de degré n ($n \in \mathbb{N}^*$), défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, avec $a_0 \neq 0$.

Soit Q le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par : $Q(x) = P(x)\,P(x+2) + P(x^2)$

1) Montrer que si $a_n \neq -1$ alors Q(x) est de degré 2n **(0,5 pt).**
2) On suppose dans la suite que P(x) vérifie la propriété $\mathbb{R}$ : $P(x)\,P(x+2) + P(x^2) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
   On se propose de montrer que si P(x) admet une racine a, alors a = 1.
   On suppose que P(x) admis une racine a, c'est-à-dire que P(a) = 0.
   a) Montrer que $a^2$, $a^4$ sont des racines de P(x). En déduire que $a^{2^k}$, où $k \in \mathbb{N}$, est une racine de P(x). **01 point = ( 0,25 + 0,25 + 0,5)**
   b) Déduire de ce qui précède que si $|a| \neq 1$ alors P(x) a une infinité de racines. **(0,5 pt).**
   c) En déduire que $|a| = 1$. **(1 pt).**
   d) Montrer que $(a – 2)^2$ est une racine de P(x) en utilisant (R). **(0,5 pt).**
   e) Déduire de d) et de c) que a = 1. **(1 pt).**

## EXERCICE 2 (9,5 points)

ABC est un triangle du plan euclidien.
Un triangle P Q R sera dit inscrit dans le triangle A B C si les points P, Q et R sont respectivement situés sur les segments [BC], [CA], [AB] et sont distincts des extrémités de ces segments ; un tel triangle P Q R inscrit dans le triangle A B C sera qualifié de cévien si les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.
A un triangle P Q R inscrit dans le triangle A B C, on associe les six nombres réels $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $\nu_1$, $\nu_2$ et $\nu_3$, strictement positifs, définis par les relations suivantes.

$$\overrightarrow{BP} = \mu_1 \overrightarrow{BC}\,;\ \overrightarrow{PC} = \nu_1 \overrightarrow{BC}\,;\ \overrightarrow{CQ} = \mu_2 \overrightarrow{CA}\,;\ \overrightarrow{QA} = \nu_2 \overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{AR} = \mu_3 \overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{RB} = \nu_3 \overrightarrow{AB}$$

1) a) Calculer en fonction de $\mu_3$ et de $\nu_2$ le rapport de l'aire du triangle A R Q à l'aire du triangle A B C **(1 pt).**
   b) Montrer que le rapport de l'aire du triangle P Q R à l'aire du triangle A B C **(1 pt)**
   est : $r = 1 - \mu_3\nu_2 - \mu_1\nu_3 - \mu_2\nu_1$.
   c) Montrer que : $\mu_i + \nu_i = 1$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$. **(0,75 pt)**
   d) En déduire que $r = \mu_1\mu_2\mu_3 + \nu_1\nu_2\nu_3$. **(1 pt)**

2) On suppose que P Q R est Cévien. On appelle M le point d'intersection des droites (AP), (BQ) et (CR).
   a) Déterminer les rapports **2,5 points = ( 0,5+ 0,5+0,5+ 0,5+ 0,5 )**

$$\frac{\text{Aire(ABP)}}{\text{Aire(APC)}}\ ;\quad \frac{\text{Aire(MBP)}}{\text{Aire(MPC)}}\ ;\quad \frac{\text{Aire (AMB)}}{\text{Aire (AMC)}}\ ;\quad \frac{\text{Aire (AMC)}}{\text{Aire (CMB)}}\quad \text{et}\quad \frac{\text{Aire (BMC)}}{\text{Aire (BMA)}}$$

b) En déduire que $\mu_1 \mu_2 \mu_3 - \nu_1 \nu_2 \nu_3 = 0$ ; **(1 pt)**

3) a) Montrer que le triangle P Q R, cévien, est d'aire maximale, si et seulement si $\mu_1 \mu_2 \mu_3 + \nu_1 \nu_2 \nu_3$ est maximale. **(1 pt)**

b) Montrer que $S \leq \frac{1}{4}$. **(0,5 pt)**

c) En déduire qu'il existe un triangle cévien inscrit dans le triangle A B C d'aire maximale. **(0,75 pt**

## EXERCICE 3 ( 5 points)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue et vérifiant la relation (1) suivante :

(1) : $f(x+y) + f(x-y) = 2 f(x). f(y)$, quels que soient x et y appartenant à $\mathbb{R}$.

1) Déterminer les fonctions constantes vérifiant (1). On suppose, dans la suite, que f est différente de ces fonctions. **(0,5 pt)**

2) Déterminer f(0). Etudier la parité de f . **1 point = ( 0,25 +0,75)**

Le Plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3) On suppose que f admet une racine $\alpha$.

a) Montrer que I $(\alpha, 0)$ est un centre de symétrie de la courbe de f. **(0,5 pt)**

b) En déduire que $4\alpha$ est une période de f. **(0,5 pt)**

c) Montrer que $f(4\alpha) = 1$. **(0,5 pt)**

d) Montrer que si b est une période alors $f(b) = 1$. **(0,5 pt)**

e) Réciproquement, soit b une période de f étudier $f\left(\frac{b}{2}\right)$ et montrer que si $\frac{b}{2}$ n'est pas une période de f, on a : $f\left(\frac{b}{4}\right) = 0$. **(0,5 pt)**

4) Soit R l'ensemble des racines positives de f. Nous admettons que R admet un plus petit élément noté a.
On rappelle aussi que toute fonction continue sur un intervalle qui change de signe sur cet intervalle s'annule sur cet intervalle.
Montrer alors que $\forall x \in [0, a[$ , $f(x) > 0$. **(0,5 pt)**

5) Donner deux exemples de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant (1). **0,5 point =( 0,25 + 0,25**)

**Présentation, clarté et précision** **( 1 point)**

# C O R R I G E

## EXERCICE 1

Soit P de degré n

1) $A_n\, x^n$ est le terme de plus haut degré
   Le terme de plus haut degré de Q est $(a_n + a_n^{\,2})\, x^{2n}$
   Q est de degré 2 n si $a_n \neq -1$.

2) On a P (a) = 0
   (R) $\Rightarrow$ P(a) P(a+2) + P($a^2$) = 0
   $\Rightarrow$ P($a^2$) = 0
   donc $a^2$ est racine de P
   on a aussi P ($a^2$) P($a^2$+2) + P($a^4$) = 0
   donc P($a^4$) = 0
   Par conséquent $a^4$ est racine de P.

3) Plus généralement, si $(a^2)^k$, $k \in \mathbb{N}$ est racine de P
   Si $|a| = 1$ on a = 0 $(a^2)^k = 1$ ou $(a^2)^k = 0$ $k \in \mathbb{N}$
   Pour a = 1 on a une seule racine 1
   Pour a = 0 on a une seule racine 0
   Pour a = -1 on a 2 racines –1 et 1
   Donc pour $|a| \neq 1$ et $a \neq 0$ P admet une infinité de racines donc P = 0.

4) $|a| = 1$ on a = 0
   Prenons x = a – 2 dans ( R), on a P (a – 2) P(a) + P($(a-2)^2$)) = 0
   Donc P($(a-2)^2$) = 0
   Ainsi $(a-2)^2$ est racine de P
   Donc $(a-2)^2 = 0$ on $(a-2)^2 = 1$
   Pour a – 2 = 0 on a a = 2 Inp ( $|a| = 1$ ou a = 0)
   Pour a – 2 = 1 on a a = 3 inp
   Pour a – 2 = -1 on a a = 1 et c’est la seule racine de P.

## EXERCICE 2

1) Aire (ARQ) = $\frac{1}{2}$ Ar. AQ sin $\widehat{A}$
   = $\mu_3\, \nu_2$ Aire (ABC).

De même Aire (BPR) = $\mu_1\, \nu_3$ Aire (ABC)
Aire (CPQ) = $\mu_2\, \nu_1$ Aire (ABC)
Or Aire (ABC) – Aire (PQR) = Aire (ARQ) + Aire (BPR) + Aire CR)
= $(\mu_3\, \nu_2 + \mu_1\, \nu_3 + \mu_2\, \nu 1)$ Aire (ABC)
soit Aire (PQR) = (1-$(\mu_3\, \nu_2 + \mu_1\, \nu_3 + \mu_2\, \nu_1)$ Aire (ABC)
le rapport de Aire (PQR) = aire (ABC) est 1 –$(\mu_3\, \nu_2 + \mu_1\, \nu_3 + \mu_2\, \nu_1)$
la relation de Charles donne $u_i + v_i = 1\ \forall\ < i \leq 3$.

Donc $1 - (\mu_3 \nu_2 + \mu_1 \nu_3 + \mu_2 \nu_1) = 1 - (\mu_3 (1-\mu_2) + \mu_1 (1-\mu_3) + \mu_2 (1-\mu_1))$

$$= 1 - \mu_3 - \mu_1 \mu_2 - \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_3 + \mu_2 \mu_1$$
$$= (1-\mu_1)(1-\mu_2)(1-\mu_3) + \mu_1 \mu_2 \mu_3$$
$$= \nu_1 \nu_2 \nu_3 + \mu_1 \mu_2 \mu_3$$
$$= \mu_1 \mu_2 \mu_3 + \nu_1 \nu_2 \nu_3$$

2)

ABP et APC sont deux triangles ayant même hauteur issue de A : donc

$$\frac{\text{Aire(ABP)}}{\text{Aire(APC)}} = \frac{BP}{PC} = \frac{\mu_1}{\upsilon_1}$$

de même $\dfrac{\text{Aire(MBP)}}{\text{Aire(MPC)}} = \dfrac{BP}{PC} = \dfrac{\mu_1}{\upsilon_1}$

or Aire (AMB) = Aire (ABP) – Aire (MBP)

Aire (AMC) = Aire (APC) – aire (MCP)

donc $\dfrac{\text{Aire(AMB)}}{\text{Aire(AMC)}} = \dfrac{\frac{\mu_1}{\upsilon_1}\text{ Aire (APC)} \qquad \frac{\mu_1}{\upsilon_1}\text{ Aire (MPC)}}{\text{Aire (APc)} \quad \text{Aire (MPC)}} = \dfrac{\mu_1}{\upsilon_1}$.

de même $\dfrac{\text{Aire (AMC)}}{\text{Aire}\cdots\text{(CMB)}} = \dfrac{\mu_3}{\upsilon_3}$ et $\dfrac{\text{Aire (BMc)}}{\text{Aire (BMA)}} = \dfrac{\mu_2}{\upsilon_2}$

et $\dfrac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{\upsilon_1 \upsilon_2 \upsilon_3} = \dfrac{\text{Aire (AMB)} \times \text{Aire (BMC)} \times \text{Aire (AMC)}}{\text{Aire (AMC)} \times \text{Aire (BMA)} \times \text{Aire (CMB)}} = 1$

ainsi $\mu_1 U_2 \mu_3 = \nu_1\nu_2\nu_3$.

3) D’après 1) et 2), il s’agit de déterminer le man de $S = \mu_1\nu_2\mu_3+\nu_1\nu_2\nu_3$ tel que $\mu_1\mu_2\mu_3 = \nu_1\nu_2\nu_3$.
et $\forall\ 1 \leq i \leq 3\ \mu i + \nu i = 1$.
$\mu i \geq 0$.
On a : $S = \mu_1 \mu_2 \mu_3 + (1-\mu_1)(1-\mu_2) 1-\mu_3)$
$= 1 - \mu 1 - \mu_2 - \mu_3 + \mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1$.

Posons $\mu i = \dfrac{1}{2} + ti \quad (ti \in ]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}[$ cos $ui \in ]0, 1[$

Donc $S = 1 - \dfrac{1}{2} - t_1 - \dfrac{1}{2} - t_2 - \dfrac{1}{2} - t_3 + (\dfrac{1}{2}+t_1)(\dfrac{1}{2} + t_2) + (\dfrac{1}{2} + t_2)(\dfrac{1}{2} + t_3) + (\dfrac{1}{2} + t_3)(\dfrac{1}{2} + t_1)$

$$= \frac{1}{4} + t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1.$$

avec $-4 t_1 t_2 t_3 = t_1 + t_2 + t_3$ $(\mu_1\mu_2\mu_3 = (1-\mu_1)(1-\mu_2)(1-\mu_3)$

comme $|ti| < \dfrac{1}{2}$ alors $4 t_1 t_2 \neq -1$.

donc $t_3 = -\dfrac{t_1 + t_2}{1 + 4 t_1 t_2}$

d'où S = $\frac{1}{4}$ + t1 t2 - $\frac{t_2\ (t_1 + t_2)}{1 + 4\ t_1\ t_2} \quad \frac{t_1(t_1 + t_2}{1 + 4\ t_1\ t_2}$

$$= \frac{1}{4} + \frac{4\ t_1^2 t_2^2 \quad t_2^2 \quad t_1^2 \quad t_1\ t_2}{1 + 4\ t_1\ t_2}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{t_1\ t_2 + t_1^2 (1 \quad 2t_2^2) + t_2^2 (1 \quad t_1^2)}{1 + t_1\ t_2}$$

or 1 – 2ti$^2$ > 0 donc S ≤ $\frac{1}{4}$, maximum atteint pour t1 = t2 = t3 = 0 soit μ I = $\frac{1}{2}$.

Le triangle cévien d'aire max est donc le triangle médian (dont les sommets sont les milieux des côtés) et son aire son égale au $\frac{1}{4}$ de Aire (ABC)

On a f (x + 2c) = -f(x) donc f(2c) = -f(0) = -1 f(4c) = 1

Soit b une période de f ; d'où f(b) = 1

Etudions f($\frac{b}{2}$)

∀ x ∈ ℝ, f(x + $\frac{b}{2}$) + f(x - $\frac{b}{2}$) = 2 f(x) f($\frac{b}{2}$)

or b étant une période, on a f(x + $\frac{b}{2}$) = f(x - $\frac{b}{2}$)

donc f(x + $\frac{b}{2}$) = f(x - $\frac{b}{2}$) = f(x) . f($\frac{b}{2}$)

pour x = $\frac{b}{2}$, on a 1 = f(0) = [f($\frac{b}{2}$)]$^2$

ce qui équivaut à f($\frac{b}{2}$) = 1 ou f($\frac{b}{2}$) = -1

or si f($\frac{b}{2}$) = 1 on aura $\frac{b}{2}$ une période de f ce qui est faux

Donc f($\frac{b}{2}$) = -1

En choisissant x = $\frac{b}{4}$ dans la relation

f(x- $\frac{b}{2}$) = f(x) f($\frac{b}{2}$) avec f($\frac{b}{2}$) = -1

On obtient f(-$\frac{b}{4}$) = - f($\frac{b}{4}$)

Or f est paire

Donc f($\frac{b}{4}$) = 0

4) Supposons qu'il existe x0 ∈ [0,a[ tel que f(x0) ≤ 0
Si f(x0) = 0, x0 serait racine et a ne serait pas ppelt de R
On peut donc supposer f(x0) < 0.

**EXERCICE 3**

1) Soit k la valeur constante de f. On a donc $2k = 2k^2$ d'où k = 0 ou k = 1
   On obtient ainsi $\forall x \in R$, f(x) = 0 ou $\forall x \in R$ f(x) = 1

2) Supposons y = 0 dans (1)
   $\forall x \in R\ 2f(x) = 2f(x)\ ;\ f(0) \Leftrightarrow \forall x \in R\ f(x)\ (f(0) - 1) = 0$
   puisque f est non identiquement nulle, on aura f(0) = 1
   Supposons maintenant x = 0 dans (1)
   $\forall$ y f(y) + f(-y) = 2 f(y) d'où f(-y) = f(y) $\forall$ y f est paire.

3) Soit c tel que f(c ) = 0 (donc $c \neq 0$). En choisissant y = c dans (1), on obtient
   $\forall x \in R\ f(x + c) + f(x-c) = 0$
   ce qui signifie que la courbe de f est symétrie par rappoprt au point I(c,0)
   dans la relation f(x +c) + f(x-c) = 0, on prend
   on aura $\forall$ x f(x+2c) + f(x) = 0
   on en déduit que f(x+4c) + f(x+2c) = 0
   Soit f(x+4c) = -f(x+2c) = f(x)
   d'où f(x+4c) = f(x)
   donc 4c est une période de f
   comme f(0) > 0, il existerait $\alpha$ / 0 < $\alpha$ < x0 a ne serait pas alors le P P élément de R
   Concl : $\forall x \in [0,a[\quad f(x) > 0$