3. Démontrer que : $A_{n+1} = A_n + \dfrac{\sqrt{3}}{12}\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$.

En déduire que : $\forall\, n \geq 1 \;\; A_n = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3\sqrt{3}}{20} \times \left[1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^n\right]$ $(0,5+1)\,pts$

4. Trouver $\lim\limits_{x \to +\infty} A_n$. $0,25\,pt$

5. Répondre à la question posée au début de l'exercice. $0,25\,pt$

PROBLEME ($15\,points$).

Dans le plan orienté $\mathscr{P}$, on considère trois points non alignés A, B et C tels que la mesure principale β de l'angle $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$ appartient à $]0\ ,\ \pi[$.
Soit l''application f de $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}$, qui à un point M du plan associe le réel :

$$f(M) = MA + MB + MC$$

On propose de démontrer que f admet un minimum qui est atteint en un seul point.
(C'est-à-dire qu'il existe un unique point T tel que $f(T) \leq f(M)$ pour tout point M de $\mathscr{P}$.)

Partie A

Soit M et N deux points distincts du plan et I le milieu de $[MN]$.

1. a. Montrer que pour tout point P du plan distinct de M et N, on a :

$$4IP^2 = MP^2 + NP^2 + 2MP \times NP \cos\left(\widehat{MPN}\right)$$

. $0.5\,pt$

b. En déduire que pour tout point P du plan

$$IP \leq \frac{1}{2}(MP + NP)$$

A quelle condition a-t-on l'égalité ? $0.5 + 0.5\,pt$

c. Montrer que $f(I) < \dfrac{1}{2}(f(M) + f(N))$ $1\,pt$

d. En déduire que si f admet un minimum, alors il est atteint un seul point. $0.5\,pt$

Partie B

Dans cette partie ABC est un triangle isocèle en A et H le milieu de $[BC]$.
On note $a = BC$ et $h = AH$

1. Soit M un point du plan , n'appartenant pas à (AH) et M_0 son projeté orthogonal sur la droite (AH).

a. Montrer que le symétrique B_0 de B par rapport à M_0 est le symétrique de C par rapport à (MM_0). $0.5\,pt$

b. Démontrer que :

$$M_0B + M_0C \leq MB + MC \;\text{ puis que }\; f(M_0) \leq f(M)$$

$0.5 + 0.5\,pt$

c. Démontrer que si $M_0 \notin [AH]$ alors $f(A) < f(M_0)$ $0.5\,pt$

On en déduit que si f admet un minimum en un point, ce point appartient à $[AH]$.

2. Soit M un point de $[AH)$ et φ la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}\right)$ tel que $\varphi \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

a. Démontrer que :

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \beta < \frac{\pi}{2} \quad \text{et que} \quad f(M) = h + \frac{a}{\cos\varphi} - \frac{a\tan\varphi}{2}$$

$0.5 + 1\,pt$

b.
Soit la fonction :

$$g : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(x) = h + \frac{a}{\cos x} - \frac{a\tan x}{2}$$

Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations. $1.5\,pt$

c. En déduire que f admet un minimum et préciser le point T qui réalise ce minimum.
(On distinguera le cas $\beta \leq \dfrac{\pi}{6}$ et le cas $\beta > \dfrac{\pi}{6}$). $1\,pt$

Partie C

Dans cette partie ABC est un triangle tel que l'angle $\widehat{BAC}$ a une mesure appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right[$.

Rappel : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \leq ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$

1. a.
Montrer que pour tous points M, N, P, on a :

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP} \leq NP\,(MP - NP)$$

$0.25\,pt$

b. En déduire que : $f(M) - f(A) \geq MA\left[1 - \left\|\dfrac{1}{AB}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{AC}\overrightarrow{AC}\right\|\right]$ $0.5\,pt$

2. Montrer que : $\left\|\dfrac{1}{AB}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{AC}\overrightarrow{AC}\right\| \leq 1$ $0.5\,pt$

3. Que peut-on en déduire de **1.b** et **2.** ? $0.25\,pt$

Partie D

Dans cette partie ABC est un triangle dont les angles ont des mesures strictement inférieures à $\dfrac{2\pi}{3}$.
On construit à l'extérieur du triangle ABC, les traingles équilatéraux ABC', BCA' , ACB'.

1. a. Montrer que A' est à l'intérieur du secteur angulaire $\widehat{BAC}$. $1\,pt$
(De même on a B' est à l'intérieur du secteur angulaire $\widehat{ABC}$).

b. Démontrer que les droites (AA') et (BB') sont sécantes en un point T appartenant à l'intérieur du triangle ABC. $0.25\,pt$

2. On désigne par R la rotation de centre C et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{3}$.

a. Déterminer R(A) et R(A'). En déduire que $\left(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}\right) = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ $0.5 + 0.5\,pt$

b. Soit T' l'image de T par R. Montrer que T' appartient à (BB'). $0.25\,pt$

En déduire que : $\left(\overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TC}\right) = \left(\overrightarrow{TC}, \overrightarrow{TA}\right) = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ $0.5\,pt$

c. Montrer que $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{TA}\overrightarrow{TA} + \dfrac{1}{TB}\overrightarrow{TB} + \dfrac{1}{TC}\overrightarrow{TC} = \overrightarrow{0}$ en calculant $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$ $0.25\,pt$

3. En utilisant **C 1.a** et **D 2.c**, démontrer que pour tout point M du plan, on a : $f(M) \geq f(T)$ $0.5\,pt$

4. En déduire que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes en un point qui réalise le minimun de f et démontrer que ce minimum est égal à BB'. $0.25 + 0.5\,pt$