Durée : 05 heures
Toutes séries réunies

SESSION 2014 **CLASSES DE PREMIÈRE**

MATHEMATIQUES

PROBLEME 1 (08 points)

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12.08.1988).

Il sera tenu compte pour l'appréciation des copies, de la présentation, de la clarté et de la précision de l'argumentation.

A. Soit a, b, c des réels, $a \neq 0$ et la fonction polynôme du second degré : $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto p(x) = ax^2 + 2bx + c$$

1. a. Etudier les variations de p et dresser le tableau de variation de p. (On distinguera le cas $a > 0$ et $a < 0$) **(01 point)**

   b. Préciser l'extrémum de p sur IR et en quelle valeur est-il atteint ? **(0,25 point)**

2. En déduire que p est de signe constant si et seulement si $b^2 - ac \leq 0$ **(0,75 point)**

B. **Application 1**

Pour i allant de 1 à n, on considère les n couples de réels (a_i, b_i) tels que :

$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \neq 0$

1. En considérant la fonction polynôme du second degré :

   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   $x \mapsto f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x - b_i)^2$; montrer que :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \qquad (1)$$ **(0,75 point)**

2. Déduire de (1) que :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \qquad (2)$$ **(01 point)**

3. a. Soit q un réel non nul différent de 1, n un entier naturel non nul.

   Préciser q' tel que $\sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{q'}{q-1}$ **(0,25 point)**

   b. Soit α et β des réels non nuls tels que $|\alpha| < 1$ et $|\beta| < 1$

   Déduire de (1) que : $\left|\frac{\alpha\beta(1-(\alpha\beta)^n)}{1-\alpha\beta}\right| \leq \frac{\alpha(1-(\alpha^2)^n)}{1-\alpha^2} \times \frac{\beta(1-(\beta^2)^n)}{1-\beta^2}$ **(01 point)**

   Puis que $\frac{1}{1-|\alpha\beta|} \leq \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}}$ **(0,5 point)**

C. **Application 2**

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère n points $M_i(a_i, b_i)$ avec i = 1, ..., n, on cherche la droite (Δ) : $y = tx+s$ telle que la somme des carrées des distances « verticales » des points M_i à la droite (Δ) soit minimale. La distance verticale de M_i à la droite (Δ) est $M_i N_i$ avec N_i le point de (Δ) d'abscisse a_i.

a. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} M_i N_i^2$ peut s'écrire sous la forme d'un trinôme f du second degré en s. **(0,25 point)**

.../... 2

b. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} M_iN_i^2$ est minimal si et seulement si $\bar{y} = t\bar{x} + s$

où $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ et $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i$. **(0,75 point)**

Le point G $(\bar{x}, \bar{y})$ est donc un point de (D).

1. a. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} M_iN_i^2$ peut s'écrire sous la forme

$$g(t) = \sum_{i=1}^{n}\left[(a_i - \bar{x})t - (b_i - \bar{y})\right]^2$$ **(0,25 point)**

b. Montrer que $\dfrac{\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{x})(b_i - \bar{y})\right]^2}{\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(b_i - \bar{y})^2} \leq 1$. **(0,5 point)**

c. Pour quelle valeur de t, $\sum_{i=1}^{n} M_iN_i^2$ est-elle minimale ? **(0,75 point)**

PROBLEME 2 **(12 points)**

Dans ce problème, on étudie dans une première partie quelques généralités sur les triangles semblables et dans une deuxième partie, des cas de similitudes dans un triangle isocèle particulier.

PARTIE 1 : Généralités sur les triangles semblables

Rappelons que deux triangles sont isométriques si leurs côtés sont deux à deux égaux et leurs angles aussi deux à deux égaux.

Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles. On admet :

a. Si $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\hat{A} = \hat{A}'$, alors, ces triangles sont isométriques.
b. Si $AB = A'B'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ et $\hat{B} = \hat{B}'$, alors ces triangles sont isométriques.
c. Si $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $BC = B'C'$, alors, ces triangles sont isométriques.

Définitions :

Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont dits semblables si on a les égalités suivantes :

$$\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}' \text{ et } \hat{C} = \hat{C}'.$$

On dit alors que les sommets A et A' sont des sommets homologues, de même que B et B' et C et C' les angles $\hat{A}$ et $\hat{A}'$ sont les angles homologues de même que $\hat{B}$ et $\hat{B}'$ et $\hat{C}$ et $\hat{C}'$ et les côtés [AB] et $[A'B']$ sont des côtés homologues, de même que [AC] et $[A'C']$ et [BC] et $[B'C']$

1. Démontrer que deux triangles sont semblables si et seulement si ils ont deux angles respectivement égaux. **(0,25 point)**
2. Considérons deux triangles ABC et $A'B'C'$ On suppose, sans risque de perte de généralité, que $AB > A'B'$ On note I le point de [AB] tel que $AI = A'B'$ La parallèle à (BC) passant par I coupe (AC) en J.

2.1. Supposons que $\hat{A} = \hat{A}'$ et $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$

2.1.1. Montrer que les triangles AIJ et $A'B'C'$ sont isométriques. **(0,5 point)**

2.1.2. En déduire que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables. **(0,5 point)**

2.2. Supposons maintenant que les deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables.

Montrer qu'on a : $\hat{A} = \hat{A}'$ et $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ **(01 point)**

2.3. Enoncer alors une condition nécessaire et suffisante pour que deux triangles soient semblables. **(0,25 point)**

3. Considérons toujours deux triangles ABC et $A'B'C'$

3.1. Démontrer que si ABC et $A'B'C'$ sont semblables, alors, on a : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$.

(0,5 point)

3.2. Réciproquement, supposons : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$. Supposons en plus, sans risque de perte de généralité, que $AB > A'B'$ Soit I et J les points de [AB] et [AC] tels que :

$AI = \frac{1}{k}AB$ et $AJ = \frac{1}{k}AC$.

3.2.1. Montrer que les triangles AIJ e AB'C' sont isométriques. **(0,5 point)**

3.2.2. En déduire que les triangles ABC et AB'C' sont semblables. **(0,75 point)**

3.2.3. Enoncer alors une condition nécessaire et suffisante pour que deux triangles soient semblables. **(0,25 point)**

PARTIE 2 : Application à un triangle isocèle particulier

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $\frac{AB}{BC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé le nombre d'or).

1. Soit D le point de [AB] tel que AD = BC.
   a. Démontrer que ABC et CDB sont semblables. **(01 point)**
   b. En déduire que ADC est isocèle en D puis calculer les mesures, en radian, des angles des triangles ABC et ADC. **(0,5 + 01 point)**
2. Soit E le point de la demi-droite [CB), extérieur au segment [BC], tel que BE = BA.
   Démontrer que les triangles ABC et ECA sont semblables ainsi que les triangles ADC et EBA. **(0,75 point)**
3. Soit I, J et K les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AE].
   Le plan est muni du repère (B, C, A)
   a. Montrer que les coordonnées du point D sont $\left(0 ; 1 - \frac{1}{\varphi}\right)$. **(0,5 point)**
   b. Donner les coordonnées des points E, I, J et K. **(01 point)**
   c. Donner les équations réduites des droites (DI), (BJ) et (CK). **(01,25 point)**
   d. Démontrer alors que les droites (DI), (BJ) et (CK) sont concourantes. **(01,5 point)**