Durée : 05 heures

Toutes séries réunies

SESSION 2010 **CLASSES DE PREMIÈRE**

MATHEMATIQUES

PROBLEME 1 (06 Points)

Soit O un point de l'espace muni d'une unité de longueur, S la sphère de centre O et de rayon 1.

Soit A, B et C des points de S tels que C n'appartient pas au cercle de centre O passant par A et B.

On considère :

I le milieu de [AB] et J le point de (OI) tels que les droites (OA) et (AJ) sont perpendiculaires.

K le milieu de [AC] et L le point de (OK) tels que les droites (OA) et (AL) sont perpendiculaires.

On note a = $\widehat{BOC}$, b = $\widehat{COA}$, c = $\widehat{AOB}$, α = $\widehat{JAL}$

1. Exprimer OI, OJ, OK, OL $\frac{AJ}{OJ}$ $\frac{AL}{OL}$ et IK en fonction des lignes trigonométriques de $\frac{a}{2}$ $\frac{b}{2}$ $\frac{c}{2}$ **1,5pts**
2. a) Exprimer JL^2 en développant :
   i. $\left(\overrightarrow{JO} + \overrightarrow{OL}\right)^2$ **0,25pt**
   ii. $\left(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AL}\right)^2$ **0,25pt**

   b) En déduire que $\cos\left(\widehat{JOL}\right) = \cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} + sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\cos\alpha$ **1,5pts**

3 En considérant le triangle OIK, montrer que $\cos\left(\widehat{JOL}\right) = \frac{cos^2\left(\frac{b}{2}\right) + cos^2\left(\frac{c}{2}\right) - sin^2\left(\frac{a}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{b}{2}\right)\cos\left(\frac{c}{2}\right)}$ **01pt**

4 Montrer alors que cos(a) =cos(b)cos(c)+sin(b) sin(c)cos(α) **1,5pts**

PROBLEME II (14 Points)

L'objet du problème est d'étudier certaines propriétés des fonctions numériques f d'une variable réelle vérifiant les conditions suivantes :

(i) f est définie sur]-1,1[

(ii) Il existe un triplet de nombres réels (a, b, c) et une fonction numérique θ définie sur]-1,1[sauf peut-être en 0 tels que :

* $\forall x \in]-1,1[\setminus \{0\}$, $f(x) = a+bx + cx^2 + x^2\theta(x)$

* $\lim_{x\to 0}\theta(x) = 0$

CLASSES DE PREMIERE

Dans tout ce qui suit, on posera $I =]-1, 1[$ et on désignera par Mac^2 l'ensemble des fonctions définies ci-dessus.

I - ETUDE DE QUELQUES EXEMPLES

1) Montrer que l'ensemble Mac^2 est non vide. **0,25pt**

2) Prouver que toute fonction polynôme est un élément de l'ensemble Mac^2 (On pourra distinguer le cas des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2 du cas des fonctions polynômes de degré strictement supérieur à 2) **01pt**

3) Soit u la fonction de IR vers IR définie par : $u(x) = \frac{1}{1+x}$.

a) Vérifier que $(1-x+x^2)(1+x) = 1+x^3$ pour tout x appartenant à IR. **0,25pt**

b) En déduire que u appartient à Mac^2. **0,5pt**

4/On considère la fonction v de IR vers IR définie par $v(x) = \sqrt{1+x}$.

a) Etudier et représenter la courbe de la fonction v dans le plan muni d'un repère orthonormal. **0,75pt**

b) Dans le même repère, tracer (T) la tangente à la courbe de v au point d'abscisse 0 puis la courbe de la fonction $p : x \rightarrow 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ **01pt**

c) Soit θ la fonction définie sur] -1, 1 [

par : $\begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \theta(x) = \frac{1}{8} + \frac{2\sqrt{1+x} - x - 2}{2x^2} \end{cases}$

Prouver que θ est continue en 0 et montrer que v est un élément de Mac^2. **01,5pt**

5/ Soit w la fonction de IR vers IR définie par : $w(x) = \sin(x)$.

a) Montrer que pour tout x nombre réel positif, on a :

$$\sin(x) \leq x.$$

(On pourra étudier les variations de la fonction r définie par : $r(x) = \sin(-x)$ **0,5pt**

On admet que pour tout nombre réel positif on a aussi :

$$x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin(x) \leq x.$$

b) Soit φ la fonction de IR vers IR définie par : $\varphi(x) = \frac{\sin x - x}{x^2}$

Etudier la parité de φ et montrer que φ est prolongeable par continuité en 0. **01pt**

c) En déduire que w appartient à Mac^2. **0,5pt**

II - Mac^2, UN ENSEMBLE STRUCTURE

D'après I, l'ensemble Mac^2. est non vide.

Soient alors f et g deux éléments de Mac^2, et k un nombre réel.

CLASSES DE PREMIERE

1/ Etablir les relations d'appartenance suivantes :

a) $f + g \in Mac^2$ **0,25pt**

b) $k\, f \in Mac^2$ **0,25pt**

c) $f \times g \in Mac^2$ **0,75pt**

2/ Justifier l'appartenance des fonctions suivantes à Mac^2:

a) $f_1 ; x \to \frac{x^3}{1+x}$ **0,25pt**

b) $f_2 : x \to 5 \sin x + \sqrt{1+x}$ **0,25pt**

3/ Comme f appartient à Mac^2, alors il existe $(a, b, c) \in IR^3$ et θ fonction numérique définie sur I sauf peut-être en 0 tels que : $\lim_{x\to 0} \theta(x) = 0$ et $(f(x) = a + bx + cx^2 + x^2\, \theta(x)$ pour tout x pris dans I privé de 0.

On suppose qu'il existe un autre triplet ($\propto, \beta, \delta$) de nombres réels et une fonction φ définie sur I sauf peut-être en 0 tel que : $\lim_{x\to 0} \theta(x) = 0$ $f(x) = \propto + \beta x + \delta x^2 + x^2\, \varphi(x)$ $\forall x \in I \setminus \{o\}$)

Montrer qu'on a : $a = \propto$, $b = \beta$ et $c = \delta$ avec $\theta(x) = \varphi(x)$ $\forall x \in I \setminus \{o\}$. **0,75pt**

Que peut-on en conclure ? **0,5pt**

III - ETUDE DE CONDITIONS NECESSAIRES

Soit u un élément de Mac^2. Alors il existe un triplet de nombres réels (a, b, c) et une fonction numérique θ

définie sur I sauf peut-être en 0 tels que :

$\lim_{x\to 0} \theta(x) = 0$ et $u(x) = a + bx + cx^2 + x^2\, \theta(x)$ pour tout réel x pris dans I privé de 0.

On suppose que u est continue en 0.

1/ Montrer que u (0) = a. **0,25pt**

2/ Montrer que u est dérivable en 0 et que u'(0) = b. **0,5pt**

3/ On suppose que ε est dérivable sur I, et que θ' est continue en 0 avec $\theta(0) = 0$

a) Montrer que u est dérivable sur I et calculer u' (x) **01pt**
b) Montré alors que u' appartient à Mac^2. **1,5pt**
c) En déduire que $c = \frac{1}{2} u''(0)$.avec u' (0) le nombre dérivé de u' en 0. **0,5pt**

FIN DE L' EPREUVE