 09 1 CGS 02 01

Durée : 05 heures
Toutes séries réunies

SESSION 2009 **CLASSES DE PREMIÈRE**

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaire ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12.08.1988).
Il sera tenu compte pour l'appréciation des copies de la présentation, de la clarté et de la précision de l'argumentation.

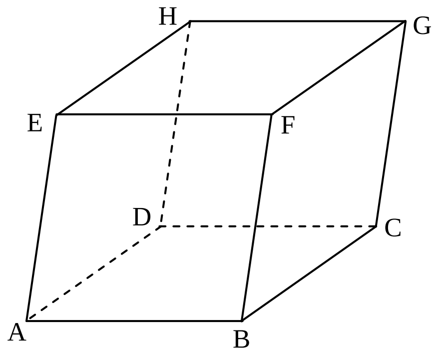
Problème I (09 points)

Rappels

- Deux droites de l'espace sont dites perpendiculaires si elles sont coplanaires et perpendiculaires dans le plan les contenant.
- Deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles respectives passant par un même point sont perpendiculaires.
- Une droite est perpendiculaire (ou orthogonale) à un plan si elle est orthogonale à toute droite de ce plan. Et on montre qu'il suffit qu'une droite soit orthogonale à deux sécantes d'un plan pour qu'elle soit perpendiculaire à ce plan.
- Deux plans de l'espace sont perpendiculaires si l'un contient une droite qui est perpendiculaire à l'autre.

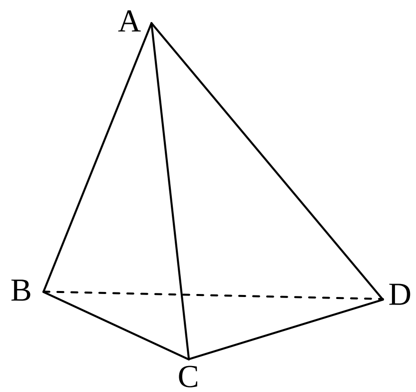
Exemple

Pour un cube ABCDEFGH, on a :
- (AB) et (BC) perpendiculaires
- (AC) et (DH) orthogonales
- (DH) perpendiculaire au plan (ABC)
- (ABC) et (BDH) perpendiculaires



Tétraèdre

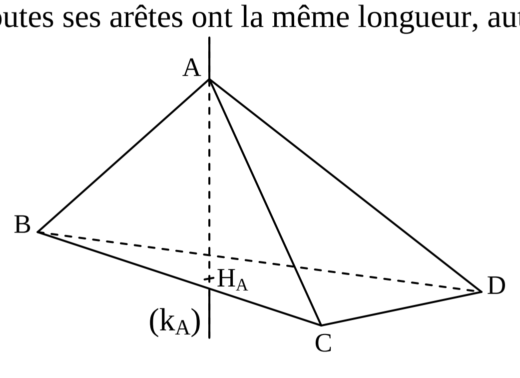
Dans l'espace, un tétraèdre est défini par la donnée de quatre points non coplanaires comme ABCD.



Un tétraèdre a 4 faces de forme triangulaire et 6 arêtes deux à deux opposées comme [AB]et [CD].

Un tétraèdre sera dit régulier si toutes ses arêtes ont la même longueur, autrement dit toutes ses faces sont des triangles équilatéraux.

$(k_A) \perp (BCD)$

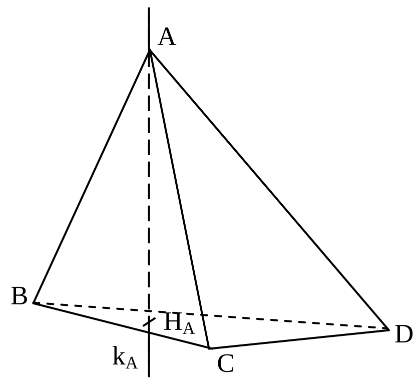


Pour un tétraèdre ABCD, la hauteur issue du sommet A est la perpendiculaire au plan (BCD) et passant par A.
Elle est généralement notée par (k_A).On définit de même (k_B), (k_C), et (k_D) les hauteurs issues respectivement de B, C et D. La hauteur (k_A) coupe le plan (BCD) en H_A appelé pied de la hauteur.
H_A est le projeté orthogonal de A sur (BCD). On définit de même H_B , H_C et H_D.

Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête a ($a \in \mathbb{R}$ et $a > 0$)
1 Soit J le milieu de [CD].

1.1 Prouver que la droite (CD) est perpendiculaire au plan (AJB). **(0,5 point)**
1.2 En déduire que deux arêtes opposées quelconques sont orthogonales. **(0,5 point)**

2 Soit H_A le pied de la hauteur issue du sommet A du tétraèdre A B C D.
2.1 Démontrer que H_A est le centre du cercle circonscrit au triangle B C D. **(0,5 point)**
2.2 Exprimer la distance AH_A en fonction de a. **(0,5 point)**
2.3 Calculer à l'aide de a le volume V du tétraèdre **(0,5 point)**



3 Soit A_1 le milieu de $[AH_A]$
3.1 Justifier que le tétraèdre A_1 B C D est trirectangulaire en A_1 c'est-à-dire que ses trois arêtes contenant A_1 sont perpendiculaires deux à deux. **(0,75 point)**
3.2 Quelle est la nature de chacun des triangles A_1 B C, A_1 C D et A_1 D B ? **(0,5 point)**

4 Soit G l'isobarycentre des points A_1, B, C et D.
Soient A', B', C' et D' les centres de gravité des triangles B C D, C D A, D A B et ABC respectivement.

4.1 Démonter qu'on a : $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AH_A}$ **(0,75 point)**
4.2 Justifier que le point G est commun aux quatre hauteurs du tétraèdre. **(0,5 point)**
4.3 Démontrer que le point G est aussi le centre de la sphère (S) circonscrite au tétraèdre A B C D. Exprimer le volume de la sphère (S) en fonction de a (on rappelle que le volume d'une sphère de rayon R est $\frac{4}{3}\pi R^3$). **(01 point = 0,5 + 0,5)**
4.4 Prouver qu'il existe une homothétie de centre G transformant les points A, B, C et D en H_A, H_B, H_C et H_D respectivement. **(0,5 point)**
4.5 En déduire que le tétraèdre H_A H_B H_C H_D est régulier et exprimer son volume v en fonction de a. **(01 point = 0,5 + 0,5)**
4.6 Quel est l'isobarycentre de H_A, H_B, H_C et H_D ? **(0,5 point)**

5 On considère les points I, J, K, L, M, N milieux respectifs des segments [AB], [CD], [BC], [AD], [AC] et [BD].
5.1 Démontrer que la droite (IJ) est à la fois perpendiculaire aux arêtes (AB) et (CD). **(0,5 point)**
5.2 Justifier que les plans (ABJ) et (CDI) sont perpendiculaires **(0,5 point)**

CLASSES DE PREMIERE

PROBLEME II **(11 points)**

PARTIE A

Définition : Soient a et b deux entiers relatifs, b non nul, on dit que b divise a ou que b est un diviseur de a, on dit aussi que a est un multiple de b, s'il existe un entier relatif k tel que a = kb.

Notation : « b divise a » se note b/a

Exemple : (-2) / 10 car 10 = (-5) x (-2)

A.1 Soit a, b et c des entiers relatifs.

A.1.1 montrer que 1, a, -1, -a sont des diviseurs de a. **(0,25 point)**

A.1.2 montrer que 0 est un multiple de a, si $a \neq 0$ **(0,25 point)**

A.1.3 montrer que si b/a alors b/ac, b étant non nul. **(0,25 point)**

A.1.4 montrer que si b/c et c/a alors b/a, b étant différent de 0. **(0,25 point)**

A.1.5 on suppose que a et b sont non nuls.
Montrer que si b/a et a/b alors a = b ou a = -b **(0,5 point)**

A.1.6 montrer que si b/a et b/c alors, quels que soient les entiers relatifs α et γ, $b/(\alpha a + \gamma c)$.
(0,25 point)

A.2 **Application**

Soit n un entier naturel. On considère les entiers $a_n = 2n + 1$ et $c_n = 3n + 8$

A.2.1 Reproduire et remplir le tableau **(0,25 point)**

n	5	6	100
Ensemble des diviseurs communs de a_n et c_n			

A.2.2 montrer que si d/a_n et d/c_n alors d/13 **(0,5 point)**

A.2.3 En déduire les diviseurs communs possibles de a_n et c_n **(0,25 point)**

PARTIE B

Définition : Soit n un entier naturel non nul, a et b deux entiers relatifs.
On dit que a est congru à b modulo n lorsque n divise a – b.

Notation : « a congru à b modulo n » se note $a \equiv b$ [n]

Exemples : 35 – 0 = 5 x 7 donc $35 \equiv 0$ [5] et $35 \equiv 0$ [7]
30 + 2 = 2 x 16 donc $30 \equiv -2$ [16] et $30 \equiv -2$ [2]

B.1 Soit a, b, c et d des entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

CLASSES DE PREMIERE

Montrer que :

B.1.1 $a \equiv a\ [n]$ **(0,25 point)**
B.1.2 Si $a \equiv b\ [n]$ alors $b \equiv a\ [n]$ **(0,25 point)**
B.1.3 n/a si et seulement si $a \equiv 0\ [n]$ **(0,25 point)**
B.1.4 si $a \equiv b\ [n]$ et $b \equiv c\ [n]$ alors $a \equiv c\ [n]$ **(0,25 point)**
B.1.5 si $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$ alors $a + c \equiv b + d\ [n]$ et $ac \equiv bd\ [n]$ **(0,5 point)**
B.1.6 Pour tout entier naturel $p \geq 2$, si $a \equiv b\ [n]$ alors $a^p \equiv b^p\ [n]$ **(0,5 point)**

B.2 **Application**

B.2.1 a) montrer que $35 \equiv 1\ [17]$ et $84 \equiv -1\ [17]$ **(0,25 point)**
b) En déduire que $35^{228} + 84^{501}$ est un multiple de 17. **(0,5 point)**

B.2.2 montrer que pour tout entier naturel n,
$5^n - 1$ est un multiple de 4. **(0,5 point)**

B.3 **Application**

On admettra le résultat suivant : « Soit d un entier naturel à deux chiffres et n un entier naturel.
$n \equiv d\ [100]$ si et seulement si d est le nombre formé par les deux derniers chiffres de n »

On considère la suite d'entiers naturels (U_n) définie par :
$U_0 = 14$ et $U_{n+1} = 5\,U_n - 6$ pour tout entier naturel n.

B.3.1 Donner U_1, U_2, U_3, U_4. Quelle conjecture peut-on émettre concernant leurs deux derniers chiffres ? **(0,5 point)**

B.3.2 a) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+2} \equiv U_n\ [4]$ **(0,5 point)**
b) En déduire que pour tout entier naturel p : **(0,5 point)**
$U_{2p} \equiv 2\ [4]$ et $U_{2p+1} \equiv 0\ [4]$

B.3.3 a) Montrer que pour tout entier naturel n, $2U_n = 5^{n+2} + 3$ **(0,75 point)**
b) En déduire que pour tout entier naturel n, il existe un entier k_n tel que $U_n = 14 + 50\,k_n$ **(0,75 point)**
(on pourra utiliser B.2.2)

B.3.4 a) Montrer que si n est pair alors k_n est pair et que si n est impair alors k_n est impair. **(01 point)**
b) Déterminer alors les deux derniers chiffres de U_n suivant la parité de l'entier naturel n. **(01 point)**