Durée : 05 heures
Toutes séries réunies

SESSION 2007 **CLASSES DE PREMIÈRE**

MATHEMATIQUES

Le sujet comporte un problème obligatoire. Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la présentation, de la clarté, de la rigueur et de la concision des démonstrations.

PROBLEME

Définition :

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction numérique définie sur I ($f : I \to \mathbb{R}$). On appelle primitive de f, sur I une fonction numérique F définie et dérivable sur I telle que pour tout x de I, F'(x) = f(x).

Exemple :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + x$ admet $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \pi$ pour primitive.

Notations :

- Par primf on désigne une primitive de f. Ainsi primf est dérivable et (primf)'(x)) = f(x).
- L'ensemble des primitives d'une fonction f se notera Primf.
- Si une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie en a et b, on posera $F\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Par exemple, pour

  F(x) = sin x. cos x, on a $F\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = F(\frac{\pi}{2}) - F(0) = 0 - 0 = 0$.

PARTIE A **(06,5 pts)**

1) Préciser pour chacune des fonctions f suivantes les ensembles de définition et de dérivabilité puis calculer f'(x) :

a) $f(x) = x\sin^3 x$ **(0,25 pt)**

b) $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$ **(0,5 pt)**

2) **a)** Déterminer, si possible, une primitive de la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants :

i) $I = \mathbb{R}$ $f(x) = x - 3\sin x$ **(0,25 pt)**

(ii) $I =]1, +\infty[$ $f(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$ **(0,25 pt)**

(iii) $I =]0, +\infty[$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ **(0,25 pt)**

CLASSES DE PREMIERE

b) tan est l'application numérique définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par : $\tan(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$.

(i) Prouver que tan est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera. **(0,75 pt)**

(ii) On désigne par arc tan la réciproque de l'application tan. Prouver que arc tan est dérivable sur J et montrer qu'on a : $\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Interpréter ce résultat. **(0,75 pt)**

3/ On désigne par T l'ensemble des fonctions f de ℝ vers ℝ définies par : f(x) = a cos x + b sin x où a et b sont deux nombres réels.

a) (i) Vérifier que T n'est pas vide. **(0,25 pt)**

(ii) Montrer que f : ℝ→ℝ où $f(x) = 4\cos^3 x - \cos 3x$ est un élément de T. **(0,5 pt)**

(iii) Déterminer les éléments de T qui sont impairs. **(0,25 pt)**

b) Soient f et g deux éléments de T et λ un nombre réel. Prouver que f + g et λf sont encore des éléments de T. **(0,25 pt)**

c) Vérifier que si f appartient à T alors f est dérivable sur ℝ et f ' est encore un élément de T. Que peut-on dire d'une primitive d'un élément de T. **(0,25 pt)**

4/ En rappelant les formules de dérivation d'une fonction composée (g o f) et d'une fonction puissance (u^n), déterminer une primitive des fonctions suivantes :

a) f : ℝ → ℝ / $f(x) = x\cos(\pi x^2)$. **(0,5 pt)**

b) g :] 0, +∞[→ ℝ / $g(x)=\frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}$. **(0,5 pt)**

5/ **a)** Rappeler la formule de dérivation du produit uv de deux fonctions dérivables u et v. **(0,25 pt)**

b) On suppose que u et v sont dérivables sur I et que u.v' et u'.v possèdent une primitive sur I. Etablir alors la relation suivante : prim(uv') = u.v - prim(u'v). **(0,5 pt)**

c) **<u>Application</u> :**

Trouver une primitive de la fonction f : ℝ→ℝ définie par f(x) = x sinx. **(0,25 pt)**

PARTIE B (02,75 pts)

1/ On suppose que f et g sont deux fonctions numériques dérivables sur I (intervalle) telles que : $f'(x) = g'(x), \forall x \in I$.

a) Montrer que la fonction h, définie sur I par h(x) = f(x) - g(x), est constante sur I. **(0,25 pt)**

b) Si de plus on suppose qu'il existe a appartenant à I tel que f(a) = g(a), que peut-on dire des fonctions f et g ? **(0,25 pt)**

2/ a) On suppose que $f : I \to \mathbb{R}$ possède deux primitives F et G sur I. Montrer, en utilisant B_1, qu'il existe un réel k tel que $F(x) = G(x) + k$, pour tout x appartenant à I. **(0,25 pt)**

b) Réciproquement montrer que si F est une primitive sur I de la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ alors toute autre fonction $G : I \to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = F(x) + k$ où k est une constante réelle est encore une primitive de f. **(0,25 pt)**

3/ a) Déduire de ce qui précède que, toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ n'admet pas de primitives sur I ou admet une infinité de primitives sur I. **(0,5 pt)**

b) Déterminer Primf où $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{x^2}$. **(0,25 pt)**

4/ On suppose que $f : I \to \mathbb{R}$ possède une primitive sur I. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Démontrer que f possède sur I une seule primitive qui prend la valeur y_0 en x_0. **(0,5 pt)**

5/ Etablir que si F et G sont deux primitives sur I de $f : I \to \mathbb{R}$ alors, quels que soient a et b appartenant I, on a : $F\Big|_a^b = G\Big|_a^b$ **.** **(0,5 pt)**

Dans toute la suite, si $f : I \to \mathbb{R}$ possède sur I une primitive F, on posera $I(f, a, b) = F\Big|_a^b$ avec bien sûr a et b éléments de I.

On admettra que toute fonction définie et continue sur I possède une primitive sur I.

PARTIE C **(04,25 pts)**

1/ On définit les fonctions f et g de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

a) Calculer, après avoir justifié son existence, $A = I(f, 1, 4)$. **(0,25 pt)**

b) Même question pour $B = I\left(g, 0, \frac{\pi}{4}\right)$. **(0,5 pt)**

c) En utilisant A/ 5/, calculer le nombre $C = I\left(h, 0, \frac{\pi}{2}\right)$ où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $h(x) = x \sin x$.

(0,25 pt)

2/ a) On se donne $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur [a,b]. Soit λ un nombre réel.

i. Justifier l'existence des nombres suivants :

$I(f, a, b)$, $I(g, a, b)$, $I(f+g, a, b)$ et $I(\lambda f, a, b)$. **(0,25 pt)**

ii. Montrer qu'on a :

$I(f+g, a, b) = I(f, a, b) + I(g, a, b)$

$I(\lambda f, a, b) = \lambda\, I(f, a, b)$. **(0,5 pt)**

b) i. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, a, b, c des éléments de I. Prouver qu'on a :
$I(f, a, b) + I(f, b, c) = I(f, a, c)$ **(0,25 pt)**

ii. Utiliser ce résultat pour justifier l'existence et calculer I(f, -3, 1) où on a :
$f(x) = |x^2-x-2|$ (on pensera à écrire f(x) sans barres de valeur absolue). **(0,25 pt)**

3/ On suppose $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et impaire. On rappelle que si x est dans I alors –x appartient aussi à I.
Soit F une primitive de f sur I.

a) Etudier les variations de la fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = F(x) - F(-x)$ **(0,25 pt)**

b) Calculer $\varphi(0)$. Que peut-on en déduire pour la fonction F. **(0,25 pt)**

c) Déduire de ce qui précède que I(f, -a, a) = 0 quel que soit a appartenant à I. **(0,25 pt)**

4/ **a)** On suppose $f : I \to \mathbb{R}$ continue et positive sur I. Soit F une primitive de f sur I.
i. Préciser les variations de F sur I. **(0,25 pt)**
ii. En déduire que si a et b appartiennent à I avec $a \leq b$ alors $I(f, a, b) \geq 0$ **(0,25 pt)**

b) Montrer que si les fonction f et g sont définies et continues sur [a, b] avec $f(x) \leq g(x)$ pour $x \in I$ alors $I(f, a, b) \leq I(g, a, b)$ **(0,25 pt)**

c) On pose $f(x) = \dfrac{2\cos^2 x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

i. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :
$$0 \leq f(x) \leq 1 + \cos 2x$$ **(0,25 pt)**

ii En déduire qu'on a :
$$O \leq I(f, 0, \frac{\pi}{2}) \leq \frac{\pi}{2}$$ **(0,25 pt)**

PARTIE D (03 pts)

On désigne par u la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $u(t) = \frac{1}{t}$. Pour x réel strictement positif, on pose L(x) = I(u, 1, x)

1/ Justifier l'existence de L(x) pour tout x > 0. **(0,25 pt)**
L définit ainsi une application de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$. Calculer L(1). **(0,25 pt)**

2/ a) Montrer que L est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$, puis étudier les variations de L sur $]0, +\infty[$. (On dressera le tableau des variations en admettant que $\lim\limits_{x \to +\infty} L(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0+} L(x) = -\infty$) **(0,5 pt)**

b) Montrer que la fonction L réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur J un intervalle que l'on précisera. En déduire qu'il existe un unique réel e tel que L(e) = 1 **(0,25 pt)**

3/ Soit $a \in]0, +\infty[$. On définit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par $f(x) = L(ax) - L(a) - L(x)$

a) Calculer f(1). **(0,25 pt)**

b) Etudier les variations de f. **(0,5 pt)**

c) Déduire de ce qui précède que $\forall a > 0 \ \forall b > 0$
$L(ab) = L(a) + L(b)$ **(0,25 pt)**

CLASSES DE PREMIERE

d) Prouver alors les relations suivantes :

$L(a^n) = n\,L(a)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}_+^*$

$L(\frac{1}{a}) = -L(a)$, $a \in \mathbb{R}_+^*$

$L(\frac{a}{b}) = L(a) - L(b)$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}^*$

$L(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} L(a)$, $a \in \mathbb{R}^*$ **(0,5 pt)**

e) Exprimer en fonction de L(2) et L(3) le réel $L(\frac{4e}{\sqrt{6}})$ **(0,25 pt)**

PARTIE E **(03,5 pts)**

Soit n un entier naturel. On définit la fonction fn de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ en posant $fn(x) = \frac{x^n}{2+\cos x}$.

1/ Préciser Dn le domaine de définition de f_n. **(0,25 pt)**

Etudier la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ suivant les valeurs du réel x. **(0,5 pt)**

2/ Justifier l'existence de $I(f_n, 0, 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On définit alors la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ en posant $U_n = I(f_n, 0, 1)$ **(0,25 pt)**

3/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, 1]$, $0 \leq fn(x) \leq 1$. En déduire que la suite $(Un)_{n\geq 0}$ est bornée. **(0,5 pt)**

4/ Etudier les variations de la suite $(Un)_{n\geq 0}$. (On remarquera que pour $x \in [0, 1]$, $x^{n+1} \leq x^n$) **(0,5 pt)**

5/ Déduire de ce qui précède que la suite $(Un)_{n\geq 0}$ est convergente. **(0,25 pt)**

6/ Etablir que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$ on a :

$\frac{1}{3}x^n \leq f_n(x) \leq x^n$. **(0,5 pt)**

7/ Montrer qu'on a : $\frac{1}{3n+3} \leq Un \leq \frac{1}{n+1}$. **(0,5 pt)**

Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} Un$. **(0,25 pt)**